

## Correction Devoir maison n°15

**Exercice 1**

On dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$  :  $U_1$  contient 2 boules blanches et 2 boules noires et  $U_2$  contient une boule blanche et 3 boules noires. On effectue des tirages avec remise d'une boule selon le protocole suivant :

- le premier tirage se fait dans l'urne  $U_1$
- si le  $n^{\text{ième}}$  tirage a donné une boule blanche (resp. noire), le  $n + 1$  ième tirage s'effectue dans l'urne  $U_1$  (resp.  $U_2$ ).

On introduit les événements  $B_n$  (resp  $N_n$ ) "le  $n^{\text{ième}}$  tirage donne une boule blanche (resp. noire) " et on note  $p_n = P(B_n)$ .

1. Le premier tirage se fait dans l'urne 1, donc

$$p_1 = \frac{1}{2}.$$

Les événements  $(B_1, N_1)$  forment un système complet d'événements. Ainsi, d'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} p_2 &= p(B_1) \times p_{B_1}(B_2) + p(N_1) \times p_{N_1}(B_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } p_2 = \frac{3}{8}.$$

2. On calcule

$$p(B_1 \cap B_2) = p(B_1) \times p_{B_1}(B_2) = \frac{1}{4}$$

et d'un autre côté,

$$P(B_1) \times P(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$$

Les événements  $B_1$  et  $B_2$  ne sont pas indépendants.

3. Les événements  $(B_n, N_n)$  forment un système complet d'événements. Ainsi, d'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p(B_n) \times p_{B_n}(B_{n+1}) + p(N_n) \times p_{N_n}(B_{n+1}) \\ &= p_n \times \frac{1}{2} + (1 - p_n) \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{p_n}{2} - \frac{p_n}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}.$$

4. On reconnaît une suite arithmético-géométrique. On résout l'équation

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \iff \frac{3}{4}x = \frac{1}{4} \\ &\iff x = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

On pose alors la suite  $v_n = p_n - \frac{1}{3}$ . On remarque que

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{4}\left(v_n + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{4}v_n\end{aligned}$$

La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est géométrique et  $v_1 = p_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ , on a donc

$$v_n = \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } p_n = \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}.}$$

Comme  $|1/4| < 1$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$  et donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{3}}$$

## Exercice 2

On considère l'application  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}$$

La courbe représentative de  $\varphi$  sera notée  $\mathcal{C}$ . On rappelle que  $\ln(2) \approx 0,7$  et  $\ln(3) \approx 1,1$

1. On a pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\varphi(x) = \frac{x \ln(x) + 1}{x} - \ln(x+1)$$

Or  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} x \ln(x) = 0$  par croissance comparée et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$  donc

$$\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \varphi(x) = +\infty.}$$

$\boxed{\text{La courbe admet une asymptote verticale en } x = 0.}$

2. On a

$$\varphi(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x}$$

Or

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1,$$

et  $\lim_{X \rightarrow 1} \ln(X) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ . On a

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0.}$$

3. — La fonction  $x \rightarrow \ln(x)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

— La fonction  $x \rightarrow \ln(x+1)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

— La fonction  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Par somme de fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$ ,

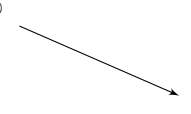
$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

4. La fonction  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc dérivable et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{x(x+1)}{x^2(x+1)} - \frac{x^2}{x^2(x+1)} - \frac{x+1}{x^2(x+1)} \\ &= \frac{x^2 + x - x^2 - x - 1}{x^2(x+1)} \\ &= \frac{-1}{x^2(x+1)} < 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*.$$

5. On dresse le tableau de variation de  $\varphi$ .

$x$	0	$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$	—	
Variations de $\varphi$	$+\infty$  0	

6. la fonction  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= \frac{-(-1) \times (3x^2 + 2x)}{(x^2(x+1))^2} \\ &= \frac{x(3x+2)}{(x^2(x+1))^2} > 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est convexe.}}$$

7. L'équation de la tangente de  $\varphi$  en 1 est

$$y = \varphi'(1)(x-1) + \varphi(1) = -\frac{1}{2}(x-1) + 1 - \ln(2)$$

c'est à dire,

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - \ln(2).$$

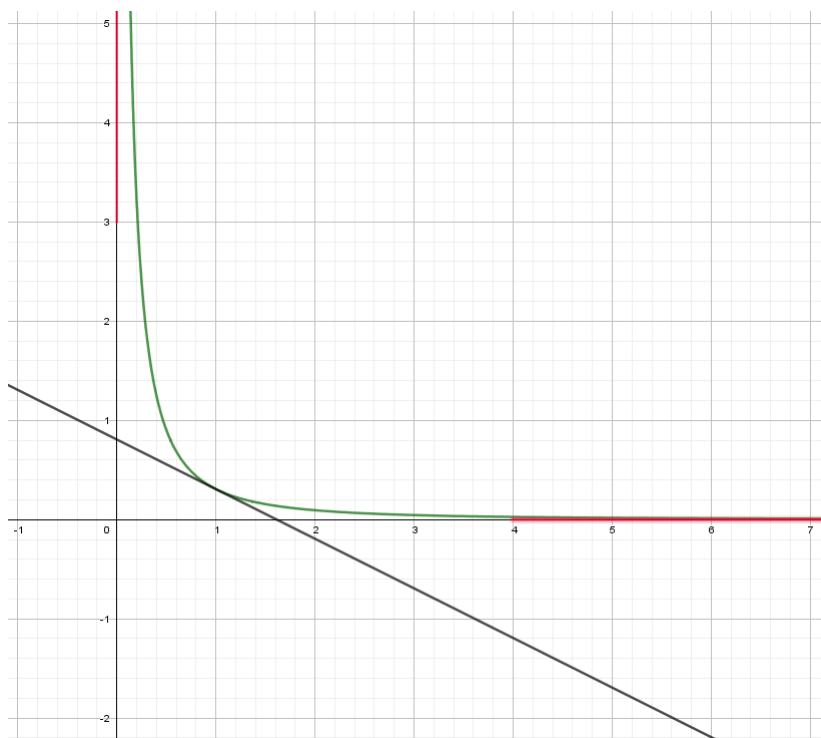
8. La fonction  $\varphi$  est convexe, elle est donc au dessus de toutes ses tangentes,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) > -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - \ln(2)$$

et comme  $\ln(2) > 0$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) > -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

9. On trace



**Figure 1** – Courbe  $\mathcal{C}$  et droite  $\Delta$ .

10. La fonction  $\varphi$  est continue et strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\varphi(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$ . Donc d'après le théorème de la bijection,

il existe un unique  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $\varphi(\alpha) = 1$ .

De plus

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{1}{3}\right) &= \ln\left(\frac{1}{3}\right) - \ln\left(\frac{1}{3} + 1\right) + 3 \\ &= -\ln(3) - \ln\left(\frac{4}{3}\right) + 3 \\ &= -\ln(4) - \ln(3) + \ln(3) + 3 \\ &= 3 - 2\ln(2) \approx 1,6 > 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{1}{2}\right) &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2} + 1\right) + 2 \\ &= -\ln(2) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) + 2 \\ &= -\ln(3) - \ln(2) + \ln(2) + 2 \\ &= 2 - \ln(3) \approx 0,9 < 1\end{aligned}$$

On a donc (comme la fonction  $\varphi$  est bijective, elle admet une réciproque strictement décroissante).

$$\varphi\left(\frac{1}{3}\right) > \varphi(\alpha) > \varphi\left(\frac{1}{2}\right) \iff \frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$$

11. On utilise la méthode de dichotomie légèrement modifié

```
a= 1/3
b= 1/2
while abs(b-a) > 10^(-2) do
  c = (a+b)/2
  if log(c) - log(c+1) + 1/c > 1 then
    a = c
  else
    b = c
  end
end
disp(a)
```

### Exercice 3

Un joueur A dispose d'une pièce qui a la propriété de faire PILE avec la probabilité  $\frac{1}{3}$ .

Un joueur B dispose d'une pièce qui a la propriété de faire PILE avec la probabilité  $p \in ]0, 1[$ .  
Les résultats des lancers de ces pièces seront toujours supposés indépendants.

Dans cette partie, on effectue le jeu suivant : *Les joueurs A et B lancent leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'au moins une des deux pièces donne PILE.*

*Si A et B ont fait PILE simultanément, le jeu s'arrête sans que personne n'ait gagné d'argent.*

*Sinon, le premier à obtenir PILE s'arrête et l'autre continue ses lancers jusqu'à obtenir PILE également et paye un euro à son adversaire à chacun des lancers de cette série "en solitaire".*

Par exemple, si A a obtenu PILE pour la première fois à son 7-ième lancer et si B a obtenu PILE pour la première fois à son 11-ième lancer, c'est B qui doit payer à A la somme de 4 euros.

On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A et  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur B et  $Z = Y - X$ .

1.  $X$  représente le premier succès lors d'une répétition d'expériences de Bernoulli.  $X$  suit donc une loi géométriques de paramètre  $\frac{1}{3}$ .  $Y$  suit pour sa part une loi géométrique de paramètre  $p$ . On a donc

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3}, \quad P(Y = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

$$E(X) = 3, \quad E(Y) = \frac{1}{p}, \quad V(X) = \frac{2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 6 \quad V(Y) = \frac{1-p}{p^2}.$$

2. (a) On a, par la linéarité de l'espérance,

$$E(Z) = E(Y) - E(X) = \frac{1}{p} - 3 = \frac{1-3p}{p}.$$

(b) En passant par les sommes partielles,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n P(X=k)P(Y=k) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3} \times (1-p)^{k-1}p \\ &= \frac{p}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2(1-p)}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{p}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2(1-p)}{3}\right)^k \end{aligned}$$

On reconnaît une somme partielle d'une série géométrique convergente. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)P(Y=k) &= \frac{p}{3} \times \left( \frac{1}{1 - \frac{2(1-p)}{3}} \right) \\ &= \frac{p}{3} \times \left( \frac{3}{3-2+2p} \right) \end{aligned}$$

On a donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)P(Y=k) = \frac{p}{1+2p}.$$

On a

$$\begin{aligned} P(Z=0) &= P(X=Y) = P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (X=k) \cap (Y=k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P((X=k) \cap (Y=k)) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)P(Y=k) \end{aligned}$$

$$\text{C'est à dire } P(Z=0) = \frac{p}{1+2p}.$$

(c) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a

$$\begin{aligned}
 P(Z = n) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (X = k) \cap (Y = n + k)\right) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y = n + k)) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = n + k) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3} \times (1-p)^{n+k-1}p \\
 &= (1-p)^n \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3} \times (1-p)^{k-1}p \\
 &= (1-p)^n \sum_{k=1}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y = k))
 \end{aligned}$$

D'après la question précédente,

$$P(Z = n) = \frac{p}{1 + 2p}(1-p)^n.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 P(Z > 0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(Z = n) \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p}{1 + 2p}(1-p)^n \\
 &= \frac{p}{1 + 2p} \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^n \\
 &= \frac{p}{1 + 2p} \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^{n+1} \\
 &= \frac{p}{1 + 2p}(1-p) \frac{1}{1 - (1-p)}
 \end{aligned}$$

$$P(Z > 0) = \frac{1-p}{1 + 2p}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
 P(Z < 0) &= 1 - P(Z = 0) - P(Z > 0) \\
 &= 1 - \frac{p}{1 + 2p} - \frac{1-p}{1 + 2p}
 \end{aligned}$$

$$P(Z < 0) = \frac{2p}{1 + 2p}.$$